ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV ŘÍZENÍ A EKONOMIKY PODNIKU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Optimalizace výroby pomocí modelu lineárního programování

Production optimization using linear programming model

AUTOR: Yevgen Ievseiev

STUDIJNÍ PROGRAM: Výroba a ekonomika ve strojírenství

VEDOUCÍ PRÁCE: Ing. Bc. Ladislav Vaniš

PRAHA 2019

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Ievseiev** Jméno: **Yevgen** Osobní číslo: **458459**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav řízení a ekonomiky podniku**

Studijní program: **Výroba a ekonomika ve strojírenství**

Studijní obor: **Technologie, materiály a ekonomika strojírenství**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Optimalizace výroby pomocí modelu lineárního programování

Název bakalářské práce anglicky:

Production Optimization using Linear Programming Model

Pokyny pro vypracování:

1. Úvod - cíle práce.
2. Teoretická část - modely LP a jejich řešení, vícekriteriální lineární programování.
3. Analytická část - vymezení problému a formulace problému do matematického modelu LP:
- stanovení omezujících podmínek, stanovení jedné nebo více kriteriálních funkcí.
4. Návrhová část
- řešení modelu, interpretace výsledků, vícekriteriální lineární programování.
5. Závěr - zhodnocení práce.

Seznam doporučené literatury:

[1] KOŽÍŠEK, Jan a Barbora STIEBEROVÁ. Statistická a rozhodovací analýza. ČVUT v Praze, 2014. ISBN 978-80-01-05509-0.
[2] JABLONSKÝ, Josef. Programy pro matematické modelování. Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 978-80-245-1810-7.
[3] PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav ŽIŽKA. Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování. V Plzni: Západočeská univerzita, 2005. ISBN 80-7043-435-x.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Ladislav Vaniš, ústav řízení a ekonomiky podniku FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.03.2019** Termín odevzdání bakalářské práce: **24.05.2019**

Platnost zadání bakalářské práce: **28.02.2020**

Ing. Ladislav Vaniš podpis vedoucí(ho) práce	prof. Ing. František Freiberg, CSc. podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

30.4.2019
Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a to výhradně s použitím pramenů a literatury, uvedených v seznamu citovaných zdrojů**.**

V Praze dne: …………………….   ……………………………

Podpis

Anotace

Předmětem bakalářské práce je řešení úkolu ve společnosti HARP Ukrajina s využitím modelů lineárního programování. První část je teoretická a popisuje podstatu lineárního programování, matematický model a vícekriteriální lineární programování a jeho metody řešení úlohy optimalizace. Ve druhé části, která je analytická, se provádí analýza zadání a jeho následně řešení. Třetí číst je návrhová a zahrnuje výsledek řešení.

Klíčová slova

Lineární programování, matematický model, účelová funkce, vícekriteriální lineární programovaní, kompromisní řešení, metoda cílového programovaní

Annotation

The theme of my bachelor work is solving tasks in "HARP Ukrajina" company using the linear programming model. First part of my work is theoretical and it is describing the nature of linear programming, mathematical model and multicriterial linear programming and its methods of solving the optimization problem. Second part is analytical. It consists of analysis of the problem and its solution. Third design part contains the result.

Keywords

Linear programming, mathematical model, purpose function, multicriterial linear programming, compromise solution, method of target programming.

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl podekovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Bc. Ladislavu Vanišovi za konzultace, cenné řady a odborné vedení. Dále bych vyjádřil své poděkování profesorce Yevseievě Oleně za podporu během napsání práce.

Obsah

Úvod

Pří studiu mně zaujali možnosti využiti lineárního programování při řešení kapacitních problému. Zjistil jsem, že některé problémy které se v podniku existují, lze řešit také pomoci modelu LP. Jedním z cílů mé práce je soustředění se na vstupy (data, která jsem dostal od strojírenského podniku) a interpretace výstupů (návrh o zlepšení současného výrobního plánu).

V současné době je velmi důležitý úkol informatizace výroby, vytváření informačních systémů, které by kromě údajů o fungování podniku mohly analyzovat a vypočítávat různé možnosti optimalizace výroby. Vývoj výrobních programů a provádění různých funkcí řízení výroby je založen na využití informací cílového charakteru na rychlosti a efektivnosti výrobních procesů s využitím počítačové technologie pro urychlení jejího zpracování.

Pro efektivní implementaci systému taktického plánování a provozního řízení výroby je velmi důležité, aby podnik vyvinul matematické modely pro optimalizaci základních ekonomických ukazatelů a odpovídajícího softwarového produktu, a vzhledem k obrovskému významu strojírenského průmyslu v ekonomice České republiky jako celku je důležité zvážit druh strojírenských podniků specifických pro průmysl.

V závislosti na tom, jaké požadavky jsou kladeny na úkol taktického plánování a provozního řízení a na jeho řešení, mohou jít o modely jednokriteriální anebo vícekriteriální optimalizace.

Předmětem mé práce je mechanismus tvorby výrobního programu strojírenských podniků s daným sortimentem výrobků.

Cílem práce je vývoj matematických modelů pro optimalizaci výroby podniku HARP pomocí lineárního programování a vytvoření programové podpory, která implementuje algoritmy pro řešení vyvinutých matematických modelů. Při tvorbě této programové podpory jsem se rozhodl uplatnit při použiti LP a také vícekriteriální LP.

Praktické využití vidím v tom, že vedení strojírenského podniku může na základě vyvinutých matematických modelů optimalizovat výrobní plán na úrovni současného plánování a zhodnotit alternativy rozhodnutí podle několika kritérií. To umožňuje právě vícekriteriální lineární programování.

1. Teoretická část

1.1 Úvod do lineárního programování

Lineární programování (LP) kupodivu nesouvisí s programováním počítačů. Termín byl zaveden v dobách, kdy počítačů bylo málo a ještě byly většinou utajené. Slovo programování bylo převzato z americké armádní hantýrky, kde se používalo ve významu rozvrh či plán nějaké činnosti, například výcviku. Cílem lineárního programování tehdy bylo stanovit optimální plán. Slovo lineární pak napovídá, že přípustné plány jsou vymezeny lineárními podmínkami pro uvažované veličiny, a také že kvalita plánu (třeba náklady nebo trvání) se poměřuje nějakou lineární funkcí těchto veličin.

V podobném duchu se lineární programování brzy začalo používat pro plánování všemožných ekonomických aktivit, například přepravy surovin a výrobků mezi továrnami, osívání polí všelijakými plodinami nebo řezání velkých papírových rolí na menší v rozměrech objednaných zákazníky. Sousloví „plánování s lineárními omezujícími podmínkami by asi lépe vystihovalo tento původní smysl lineárního programování. Nicméně termín lineární programování se mezitím ustálil, a zároveň se jeho význam podstatně rozšířil: zdaleka už nehraje roli jen v matematické ekonomii, ale objevuje se hojně například i v informatice [1].

Lineární programování nachází uplatnění při formulací a řešení modelů rozdělování zdrojů, tj. např. u výrobně-kapacitních úloh, směšovacích úloh, úloh minimalizujících odpad, dopravních úloh, výrobně dopravních úloh, a při řešení modelů rozmísťování objektů, tj. např. přiřazovacích úloh, rozmísťovacích úloh, dopravně-rozmísťovacích úloh [2].

Předmětem matematického programování je hledání extrému (maxima, minima) funkce více proměnných vázaných omezujícími podmínkami. Jde o hledání tzv. vázaných extrému.

Úlohy matematického programování nelze řešit způsoby, kterými se obvykle v diferenciálním počtu zjišťuje maximum nebo minimum funkci více proměnných (tj. stanovením lokálních extrémů na základě soustavy rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1,2,\dots,n \tag{1.1}$$

nebo užitím metody Lagrangeových multiplikátorů). Těchto metod se dá použít pouze tehdy, je-li extrém bodem definičního oboru funkce F a řešíme pouze soustavu rovnic. Tyto podmínky v případě úloh matematického programování obvykle nejsou. Funkce, jejíž extrém se hledá, se nazývá účelová neboli kriteriální funkce. Jsou-li omezující podmínky i kriteriální funkce lineární, potom mluvíme o lineárním programování [3].

Pro využití výsledků a výpočetních postupů teorie optimalizace v praxi je nejprve nutné vytvořit matematický model předmětu optimalizace.

1.2 Základní pojmy a formulace matematického modelu úlohy LP

Při aplikaci lineárních optimalizačních modelů při řešení reálných problémů lze rozlišit několik základních fázi:

1. Identifikace problému v reálném systému

Rozpoznání problému v reálném systému (např. ve výrobním podniku) je záležitostí managementu. Odborník, který se podílí na matematickém modelovaní a optimalizace, zpravidla by se měl účastnit především dalších fází.

2. Sestavení ekonomického modelu daného problému

Ekonomický model popisuje jednotlivé prvky analyzovaného systému a vztah mezi nimi. Jedná se hlavně o ty prvky, které jsou spojené se zkoumaným problémem.

Ekonomický model přitom obsahuje čtyři hlavní části:

a) Cíl analýzy (optimalizace)

b) Popis procesů, které v systému probíhají; intenzita realizace těchto procesů ovlivňuje sledovaný cíl optimalizace

c) Popis činitelů, které ovlivňují provádění procesů (procesy nemohou probíhat neomezeně, ale jejich intenzita realizace je limitována celou řadou činitelů)

d) Ekonomický model musí v poslední řadě obsahovat popis vztahu mezi výše uvedenými prvky – cílem, procesy a činiteli.

3. Sestavení matematického modelu

Matematický model úlohy lineárního programování (LP) má stejnou struktura jako model ekonomický:

- Cíl optimalizace je v úlohách LP matematicky vyjádřen lineární účelovou (kriteriální) funkcí
- Procesům odpovídajícím v matematickém modelu proměnné modelu a intenzitu realizace procesů vyjadřují hodnoty proměnných – protože intenzita realizace procesů nemůže být v typickém případě záporná, je matematický model úlohy LP doplněný o tzv. podmínky nezápornosti,

- Činitelům odpovídají v matematickém modelu omezující podmínky, které jsou vyjádřeny ve formě lineárních rovnic nebo nerovnic,
- Vztah mezi činiteli a procesy je v matematickém modelu přitom vyjádřen strukturními koeficienty [5].

Pro sestavení matematického modelu je nutné:

1) Deklarace proměnných modelu (+doplňkový proměnné modelu);
2) Stanovení omezujících podmínek.

Omezující podmínky omezují množinu přípustných řešení. Dělíme na:

- strukturální podmínky (zajišťují splnění podmínek plynoucích ze zadání konkrétního problému);
- obligatorní podmínky (specifikují definiční obory proměnných vystupujících v modelu).

3) Účelová kriteriální funkce

Umožňuje posuzovat kvalitu jednotlivých přípustných řešení z pohledu optimalizačního kritéria (např. maximalizace zisku apod.).

Obecná podoba matematického modelu úlohy lineárního programovaní je tedy následující:

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1.2}$$

za podmínek

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{1.3}$$

Kde: n – je počet strukturních proměnných modelu,

m – je počet omezujících podmínek,

$c^T = (c_1, c_1, \ldots, c_1)$ je řádkový vektor cenových koeficientů (cen) modelu,

$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ je sloupcový vektor hodnot pravých stran modelu a

$A = (a_{ij}, i = 1,2, \ldots, m, j = 1,2, \ldots, n)$ je matice strukturních koeficientů modelu.

V souladu s uvedeným značením je možné matematický model úlohy LP zapsat i následovně pomocí sumací:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.4}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,(i = 1, 2, \ldots, m);$$
$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.5)$$

Pomocí proměnných modelujeme výsledek, ze kterého po ukončení výpočtu musí být jasné, jaká rozhodnutí mám udělat.

4. Řešení matematického modelu a získání výsledků (nebo získání výsledků, že problém není v dané podobě řešitelný)

V dnešní době pro řešení úloh LP existuje řada metod. Nejdůležitější z nich je simplexová metoda, jednak proto, že pro řešení úloh LP touto metodou je většina počítačů již vybavená standardním programem, a také proto, že některé úlohy matematického programování lze řešit za pomocí simplexové metody, která je jednoduchým iteračním postupem, který konverguje k optimu (pokud optimální řešení existuje).

Simplexová metoda je algoritmus na řešení úlohy lineárního programování. Tato metoda má nálsedující geometrickou interpretaci: začneme v nějakém vrcholu množiny přípustných řešení, následně postupujeme po hranách z vrcholu do vrcholu a zlepšujeme hodnotu účelové funkce.

Pro řešení úloh lineárního programování 2 účelových funkcí můžeme použit grafickou metodu, která je založena na geometrické interpretace. V případě, že máme pouze dvě proměnné, můžeme úlohu snadno vyřešit geometricky. Množina všech přípustných řešení odpovídá polygonu na rovině. Účelová funkce je lineární, a proto svého maxima nabývá v některém z vrcholů daného polygonu (popř. na hraně).

5. Verifikace získaných výsledků

V jakémkoliv z předchozích kroků je možné se dopustit chyby. Ve všech takových případech sice vytvořený matematický model poskytne nějaké výsledky, nicméně , vzhledem k chybám z předchozích krocích budou naprosto nepoužitelné. Proto je důležitá verifikace výsledků a ověření toho, zda tyto výsledky odpovídají očekávání.

6. Implementace výsledků

V případě úspěšné verifikace by měly být výsledky modelu implementovány a měly by zpětně pozitivně ovlivnit chování modelovaného systému.

Úlohy LP je možné aplikovat v celé řadě rozhodovacích situací. Podle typu problému, který se pokoušíme řešit, se někdy mluví o typických oblastech aplikace nebo o typických úlohách LP. Vzhledem k rozmanitosti použití nelze podat vyčerpávající klasifikaci typických úloh LP. Základní hrubé členění může být však následující.

1.3 Rozdělení úloh lineárního programování

Existuji různé typy úloh lineárního programování, jako např.:

1. Úlohy výrobního plánování (kapacitní úlohy)

V úlohách tohoto typu jde o to, jak správně naplánovat objem vyráběné produkce daného sortimentu výroby, aby byla dodržená odbytová, kapacitní a další omezení. Obvyklé proměnné v úlohách tohoto typu jsou přiřazeny jednotlivým výrobkům a jejich hodnoty vyjadřuje objem výroby. Omezující podmínky modelu jsou přiřazeny k omezeným kapacitám (surovin, strojového času). Na základě daných požadavků se určuje takový výrobní program, jemuž odpovídají minimální náklady nebo maximální zisk.

2. Směšovací úlohy

Jedná se o úlohy vytvoření směsi z dostupných komponent tak, aby výsledná směs splňovala požadované vlastnosti a byla nejlevnější z pohledu výroby. Uplatňuje se při výrobě slitin, sloučenin a směsí, tj. především v průmyslu hutním, chemickém, potravinářském, farmaceutickém a v zemědělské výrobě. V úlohách tohoto typu právě cena bývá základním kritériem.

3. Úlohy o dělení materiálu (minimalizace odpadu)

V úlohách o dělení materiálu se jedná o problém dělení materiálu (např. ocelový plech atd.) na menší časti tak, aby byl minimalizován odpad. Úloha o dělení materiálu může být jednorozměrná (dělení je charakterizováno jedním rozměrem) nebo dvojrozměrná (z plochy se vyřezávají menší díly). Jednorozměrný problém vede na úlohu lineárního programování, dvojrozměrný problém je již výrazně složitější.

4. Plánování pracovních sil

V praxi často řeší úkol rozvrhování pracovníků na směny. Omezující podmínky jsou například kvalifikace pracovníků, počet pracovníků v určitém období (během směny). Proměnné zde budou vyjadřovat, zda daný pracovník na směnu bude či nebude přiřazený (hodnota proměnné 1 nebo 0).

5. **Distribuční a další speciální úlohy**

Jednou z důležitých skupin úloh LP je tzv. distribuční úlohy, mezi které patří přiřazovací problém, úloha pokrytí, úloh obchodního cestujícího, dopravní problém, kontejnerový dopravní problém a další. Např. přiřazovací úlohy určují přiřazení vlastnosti nebo funkcí věcem nebo lidem s cílem dosáhnout maximálního efektu nebo minimálních nákladů. V dopravních úlohách se hledá taková strategie přepravy, která uspokojí požadavky odběratelů na základě možností dodavatelů a to tak, aby celkové náklady na dopravu byly minimální [6].

1.4 Software pro řešení optimalizačních úloh

Tabulkové kalkulátory patří mezi nejpoužívanější a pro běžného uživatelé nejdostupnější programové systémy. Kromě základních a jim vlastních funkcí, tj. např. obsahuje celou řadu rozšiřujících možností – mezi ně patří analytické nástroje pro statistickou analýzu, nástroje pro finanční analýzu, ale také možnosti řešení optimalizačních úloh.

1. Optimalizační řešitel v systému MS Excel

Jedním z důvodu, proč jsem se použil MS Excel je, že tabulkový procesor obsahuje celou řadu add-in (doplňkových) aplikací, mezí které patří i aplikace Solver (Řešitel). Řešitel je doplňkem pro Microsoft Excel, který můžeme používat, např. pro citlivostní analýzu. Pomocí řešitele můžeme najít optimální (maximální nebo minimální) hodnotu pro vzorec v jedné buňce s ohledem na omezující podmínky určené hodnotami jiných buněk daného vzorce. Řešitel pracuje se skupinou buněk označovaných jako rozhodovací proměnné nebo proměnné buňky, které se podílejí na výpočtu vzorců v cílové buňce a buňkách s omezujícími podmínkami. Řešitel upravuje hodnoty v buňkách rozhodovacích proměnných tak, aby byly splněné omezující podmínky a aby dospěl k výsledku, který má být v cílové buňce.

Jednou z nevýhod MS Excel je, že možnosti řešení větších úloh je omezené. Horní mez pro počet proměnných modelů je 200, limit pro počet omezující podmínek je 600 (400 pro dolní a horní meze, 200 ostatní omezující podmínky).

2. Řešení větších úloh lineárního programování

Pro řešení větších úloh lineárního programování existuje řada dalších aplikací, jako např. optimalizační systém LINDO, Systém XA – Professional Linear Programming Systém, CPLEX, GUROBI, XPRESS-MP, MOSEK, FortMP, Premium Excel Solver. Pořízení nejvýkonnějších profesionálních systému pro jednorázové použití ve firmách je velkým problémem kvůli vysoké pořizovací ceně. Jedním z řešení je NEOS – server pro on-line optimalizace. NEOS server je určený k řešení optimalizačních úloh v prostředí internetu. Je dostupný zcela pro každého a kterýkoliv uživatel jej může plně využivat.

1.5 Vícekriteriální lineární programování

1.5.1 Úvod do vícekriteriálního programování

Je-li množina všech posuzovaných variant popsána implicitně, tedy soustavou omezujících podmínek, hovoříme o úlohách lineárního programování. Pokud jsou navíc tato vlastní omezení popsána lineární funkcí stejně jako v modelu úloh LP, hovoříme o úlohách vícekriteriálního lineárního programování [6].

Jinými slovy můžeme říct, že vícekriteriální lineární programování je lineární programování s použitím více účelových funkcí za týchž omezujících podmínek.

Normovaný tvar modelu vícekriteriálního LP:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \; (i = 1, \dots, n), \\ x_j \geq 0 \; (j = 1, \dots, n) \\ F_1 = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{c}_{1j} \cdot x_j = opt, \\ F_2 = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{c}_{2j} \cdot x_j = opt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots... \\ F_P = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{c}_{pj} \cdot x_j = opt. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Jen výjimečně mohou vést různé účelové funkce k témuž optimálnímu řešení, obecně se získají různá optimální řešení. Při optimalizaci podle jedné účelové funkce může dojít k velké odchylce jiné účelové funkce od její optimální hodnoty.

Proto jako první krok při řešení modelu vícekriteriálního LP je výhodné provést dílčí optimalizací podle každé účelové funkce samostatně při zanedbaní (vynechání) ostatních účelových funkcí.

Při řešení modelu vícekriteriálního LP se hledá kompromisní řešení, kterým zpravidla není žádné z dílčích optimalizačních řešení. Kompromisní řešení nemusí být optimální vzhledem k žádné účelové funkci, je však dobrým řešením vzhledem k všem účelovým funkcím.

Existuje více metod řešení modelu vícekriteriálního LP. Společné mají to, že převádějí vícekriteriální optimalizaci na jednokriteriální optimalizaci. Liší se tím, jakým způsobem stanovují kompromisní řešení.

Nejznámější a nejužívanější jsou tyto metody:

- Metoda záměny účelových funkcí za omezující podmínky
- Metoda cílového programování
- Metoda agregace účelových funkcí

1.5.2 Metoda záměny účelových funkcí za omezující.

Metoda záměny účelových funkcí za omezující podmínky vychází z předpokladu, že jedná účelová funkce je (prioritní). Tato účelová funkce se ponechá beze změny jako jediná účelová funkce modelu.

Z každé z ostatních účelových funkcí se vytvoří jedna dodatečná omezující podmínka modelu jako nerovnost, která zaručuje, že hodnota této účelová funkce buď překročí její předem stanovenou dobrou, přijatelnou hodnotu (aspirační úroveň, úroveň satisfakce hodnotového subjektu) v případě maximalizace této účelové funkce, nebo nedosáhne tuto přijatelnou hodnotu v případě minimalizace této účelové funkce.

Při stanovení dobrých, přijatelných hodnot těchto účelových funkcí se využije výsledku prvních kroku řešení modelu vícekriteriálního LP. => přijatelná hodnota každé účelové funkce musí být zvolená tak, aby se uvolnila optimální hodnota této účelové funkce, tj. buď přijatelná hodnota < optimální hodnota v případě maximalizace účelové funkce, nebo přijatelná hodnota > optimální hodnota v případě minimalizace účelové funkce.

1.5.3 Metoda cílového programování

Při metodě cílového programování se zvolí pro každou účelovou funkci cílová hodnota, které by se měla hodnota účelové funkce co nejvíce přiblížit (shora nebo zdola!)

Soustava omezujících podmínek se rozšíří o dodatečné omezující podmínky. V každé dodatečné omezující podmínce se vyskytuje jako v rovnici na levé straně jedná účelová funkce se dvěma dodatečnými proměnnými (v koeficientu +1, -1), které vyžaduje překročení nebo nedosažení zvolené cílové hodnoty této účelové funkce, která je na pravé straně rovnice.

Účelová funkce + nedosažené cílové hodnoty – překročení cílové hodnoty = cílová hodnota účelové funkce.

Účelovou funkcí modelu cílového programování není žádná z původních účelových funkcí, ale nová účelová funkce jako součet odchylek všech účelových funkcí od jejich cílových hodnot (součet nedosažení a překročení cílových hodnot všech účelových funkcí).

Tato nová účelová funkce se vždy minimalizuje (bez ohledu na to, zda se původní účelové funkce maximalizuje nebo minimalizuje).

V stanovení cílových hodnot účelových funkcí platí totéž jako v přijatelných hodnotách účelových funkcí v metodě a).

$\widetilde{F_k} - cilová\ hodnota\ k - te\ účelové\ funkce$

$u_k - nedosažení\ cílové\ hodnoty\ k - te\ účelové\ funkce$

$v_k - překročení\ cílové\ hodnoty\ k - te\ účelové\ funkce$

(k=1,…,p)

Model cílového programování

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ (i = 1, \dots, m)$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_{kj}\ (k = 1, \dots, p) \cdot x_j + u_k - v_k = \widetilde{F_k}\ (k' = 1, \dots, p) \quad (1.7)$$

$$x_j \geq 0\ (j = 1, \dots, n)$$

$$G = \textstyle\sum_{k=1}^{p} (u_k + v_k) = min \quad (1.8)$$

1.5.4 Metoda agregace účelových funkce

Metoda agregace účelových funkcí vyžaduje znalost vah kritérií λ_k , k = 1, 2, . . . , K. Vyjadřují relativní důležitost kritéria.

Při agregaci účelových funkcí vytváříme z *k* účelových funkcí jednu novou účelovou funkci. Za kompromisní řešení úlohy VLP pak považujeme optimální řešení úlohy LP vzhledem k této agregované účelové funkci.

Novou účelovou funkci definujeme vztahem:

$$F(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k F_k(\overline{X}) \to \max,\ \overline{X} \in Q, \quad (1.9)$$

$Kde\ Q -$ množina všech přípustných řešení,

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1,\ \lambda_k \geq 0,\ k = \overline{1, K} \quad (1.10)$$

Metody řešení modelu vícekriteriálního LP je výhodné použit v dialogovém (konverzačním) režimu. Uživatel (řešitel) na základě postupně získávaných výsledku na počítači může měnit:

- při metodě záměny účelových funkcí za omezující podmínky přijatelné hodnoty účelové funkcí nebo prioritní účelové funkce
- při metodě cílového programování cílové hodnoty účelové funkce

V případě p účelových funkcí je výsledkem dílčí optimalizace čtvercová tabulka rozměru n x p

Účelová funkce	1	2	………	p
Dílčí optimální řešení				
1	opt			
2		opt		
-	-	-	-	-
n				opt

Tabulka 1 Čtvercová tabulka dílčí optimalizace

V každém řádku tabulky jsou hodnoty všech účelových funkcí po dosažení daného dílčího optimálního (toto řešení je obecně optimální pouze pro jedinou účelovou funkci označenou stejným pořadovým číslem jako dílčí optimální řešení => optimální tj. maximální nebo minimální hodnoty účelových funkcí jsou v hlavní diagonále tabulky).

V každém sloupci tabulky lze sledovat, jak se liší (zhoršuje) hodnota dané účelové funkce, jestliže se do ní dosadí jiné dílčí řešení než optimální.

Kompromisní řešení má být řešení efektivní (nedominované, paretovský optimální) řešení, které nelze zlepšit vzhledem k žádné účelové funkce bez současného zhoršení vzhledem k jiné účelové funkce [7].

2. Analytická část

2.1 Představení společnosti

Při vytvoření bakalářské práce jsem se kontaktoval Ukrajinským oddělením společnosti.

Kharkiv Ložisko HARP je jedním z největších výrobců ložisek ve východní Evropě a jediným podnikem na Ukrajině, který vyrábí ložiska pro kolejová vozidla. Od ledna 2000 je závod členem průmyslové skupiny UPEC.

Obsazena plocha je více než 45 hektarů a závod zaměstnává asi 3 tisíce pracovníků. Sortiment zahrnuje více než 500 typů kuličkových a válcových ložisek s vnějším průměrem 30 až 400 mm pod známými ochrannými známkami HARP, HARP AGRO a HARP AUTO. Technologické linky a výrobní zařízení umožňují vyrábět až 30 milionů ložisek ročně.

Společnost HARP vyrábí ložiska pro 5 průmyslových odvětví:

1. Pro odvětví zemědělství
2. Pro automobilový průmysl
3. Pro železniční průmysl
4. Pro hutní průmysl
5. Pro všeobecný průmysl

Moderní výroba kuličkových a válcových ložisek vyžaduje soulad s nejvyšší rozměrovou přesností vyráběných dílů s téměř nulovými odchylkami v jedné výrobní dávce.

Pochopení toho, že vysoce kvalitní výrobek lze vyrábět pouze s využitím nejmodernějšího vybavení, společnost HARP výrazně investuje do trvalé aktualizace a modernizace svých výrobních zařízení a nezapomíná ani na pokročilé školení svých zaměstnanců.

Využití nejmodernějšího vybavení světových lídrů ve strojírenství (Behringer, OKUMA, FAMAR, VERKON, GOODWAY, ELTERMA) již umožnilo HARPu vytvořit jednu z největších společnosti na Ukrajině s tak velkým počtem CNC strojů [8].

2.2 Analýza zadání

Na začátku musí být definován problém, který budeme řešit. Pro společnost HARP jsem si vybral z jejích nabídky problematiku optimalizace výrobního plánu. Důležité bylo stanovit, jaké parametry bude mít nový výrobní plán.

Druh výrobků	Minimální produkce v kusech	Podstata strojových hodin pro výrobu jednoho kusu na stroj [h/ks]				Cena za 1 ks [Kč/ks]	Zisk na 1 ks [Kč/ks]	Náklady na 1 ks [Kč/ks]	Proměny Počet výrobků v kusech
		S1	S2	S3	S4				
A	125	1	4	6	-	1800	60	1740	x_1
B	15	-	6	5	10	1500	120	1380	x_2
C	15	3	1	-	7	1650	35	1615	x_3
D	80	4	-	3	2	1250	50	1200	x_4
Kapacita strojů [h]		900	4800	6000	6000				

Tabulka 2 Vstupní tabulka hodnot

Výrobek A – ložisko DIN-1212K, vnitřní průměr d = 60 mm, vnější průměr D = 110 mm, je zobrazen na obrázku 1.

Obrázek 1 Ložisko DIN-1212K

Výrobek B – ložisko DIN-1315K+H315, vnitřní průměr d = 65 mm, vnější průměr D = 160 mm, je zobrazen na obrázku 2.

Obrázek 2 Ložisko DIN-1315K+H315

Výrobek C – ložisko DIN-2212, vnitřní průměr d = 60 mm, vnější průměr D = 110 mm, je zobrazen na obrázku 3.

Obrázek 3 Ložisko DIN-2212

Výrobek D – ložisko DIN-6022, vnitřní průměr d = 110 mm, vnější průměr D = 170 mm, je zobrazen na obrázku 4.

Obrázek 4 Ložisko DIN-6022

Oddělení plánování neposkytlo údaje o výrobním zařízení, proto ve své bakalářské práce budu uvádět:

S1 – stroj číslo 1,

S2 – stroj číslo 2,

S3 – stroj číslo 3,

S4 – stroj číslo 4.

2.2.1 Vymezení problému

Oddělení plánování stanovilo za úkol nalezení optimálního výrobního plánu pro následující kritéria:

1. Maximální počet výrobků [ks] A, B, C i D dohromady.
2. Maximální hodnota produkce A, B, C i D v Kč.
3. Minimum nákladů na výrobu A, B, C i D v Kč.
4. Maximální zisk z produkce A,B,C i B v Kč.

2.2.2 Formulace problému do matematického modelu

Jak jsem uváděl v teoretické části, proces formulace matematického modelu má několik fázi:

1. **Deklarace proměnných modelu**

Deklarujeme proměnný modelu :

x_1 – počet výrobků typu A v kusech,

x_2 – počet výrobků typu B v kusech,

x_3 – počet výrobků typu C v kusech,

x_4 – počet výrobků typu D v kusech.

2. **Stanovení omezujících podmínek**

Omezující podmínky v daném modelu jsou:

1. Minimální počet produkce v kusech, který můžeme vyjádřit pomocí nerovnic:

$$x_1 \geq 125,$$

$$x_2 \geq 15,$$

$$x_3 \geq 15,$$

$$x_4 \geq 80.$$

2. Využití kapacity strojů a času na zpracování výrobků. Omezující podmínku typu produkce A (1 kus) na 1. stroji dostáváme násobením vektoru proměnných (x_1, x_2, x_3, x_4) na normu času stroje 1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ co nesmí přesáhnout 900. Výsledkem je $x_1 + 3x_3 + 4x_4 \leq 900.$

Stejným způsobem spočítáme omezující podmínky pro 2,3,4, ostatní stroje.

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 4800$$

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_4 \leq 6000$$

$$10x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 6000$$

3.Stanovení jedné nebo více kriteriálních funkcí

Podmínkou maximalizace počtu výrobků A, B, C i D dostaneme účelovou funkci:

$$F_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max. \quad (2.1)$$

Jednotkou měření funkce F_1 jsou kusy.

Podmínkou Maximální hodnota produkce A, B, C i D v Kč dostaneme účelovou funkci:

$$F_2 = 1800x_1 + 1500x_2 + 1650x_3 + 1250x_4 \to max. \quad (2.2)$$

Jednotkou měření funkce F_2 jsou koruny.

Podmínkou Minimum nákladů na výrobu A, B, C i D v Kč dostaneme účelovou funkci:

$$F_3 = 1740x_1 + 1380x_2 + 1615x_3 + 1200x_4 \to min. \quad (2.3)$$

Jednotkou měření funkce F_3 jsou koruny.

Podmínkou Maximální zisk z produkce A, B, C i B v Kč dostaneme účelovou funkci:

$$F_4 = 60x_1 + 120x_2 + 35x_3 + 50x_4 \to max. \quad (2.4)$$

Jednotkou měření funkce F_4 jsou koruny.

4. Formulujeme matematický model

Matematický model obsahuje účelové funkce a omezující podmínky.

Účelové funkce:

$$F_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max,$$

$$F_2 = 1800x_1 + 1500x_2 + 1650x_3 + 1250x_4 \to max,$$

$$F_3 = 1740x_1 + 1380x_2 + 1615x_3 + 1200x_4 \to min,$$

$$F_4 = 60x_1 + 120x_2 + 35x_3 + 50x_4 \to max,$$

za omezujících podmínek:

$$\begin{cases} x_1 \geq 125, \\ x_2 \geq 15, \\ x_3 \geq 15, \\ x_4 \geq 80. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 4x_4 \le 900; \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 \le 4800; \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_4 \le 6000; \\ 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 \le 6000. \end{cases} \tag{2.6}$$

Proto, abych mohl převést problém optimalizace pro funkce (2.1) - (2.4) za omezující podmínky (2.5) do standardního tvaru (1.5), zavádíme doplňující proměnné x_5, x_6, x_7, x_8 v závislosti na podmínce $x_j \ge 0,\ (j = 5, \ldots, 8)$. Tyto proměnné jsou přidány na levou stranu nerovností omezujících podmínek systému (2.6) s cílem změnit je na rovnice. Dostaneme nový systém omezujících podmínek:

$$\begin{cases} x_1 \ge 125, \\ x_2 \ge 15, \\ x_3 \ge 15, \\ x_4 \ge 80, \\ x_j \ge 0, (j = 5,6,7,8), \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 900, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_6 = 4800, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_4 + x_7 = 6000, \\ 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_8 = 6000. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ekonomický význam zavedených proměnných spočívá v tom, že představují případné nevyčerpané kapacitu každého obráběcího stroje: $S_1 - x_5$, $S_2 - x_6$, $S_3 - x_7$, $S_4 - x_8$. Jednotky měření pro proměnné jsou hodiny [h]. Dosadíme doplňující proměnné x_5, x_6, x_7, x_8 do účelových funkcí (3.1) - (3.4) s nulovými koeficienty.

Účelové funkce jsou pak definovány následovně:

$$F_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \to max, \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} F_2 = 1300x_1 + 1500x_2 + 1350x_3 + 1200x_4 + \\ +0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \to max, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} F_3 = 1740x_1 + 1380x_2 + 1615x_3 + 1200x_4 + \\ +0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \to min, \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered} F_4 = 60x_1 + 120x_2 + 35x_3 + 10x_4 + \\ +0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 \to max. \end{gathered} \tag{2.12}$$

3. Návrhová část

3.1 Řešení modelu v tabulkovém procesoru MS Excel

Hledání řešení bylo provedeno pomocí tabulkového procesoru aplikace Excel. Uvažujeme nejprve modely s jednokriteriální optimalizací.

Model 1. Maximalizace účelové funkce F_1 stanovenou vzorcem (2.9) při podmínkách (2.5) a (2.6). Na obrázku 1 je zobrazená forma řešení matematického modelu 1 pomocí tabulkového procesoru Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
2		535	441	15	80	0	0	346	1327			
3		Účelové funkce										
4	F1	1	1	1	1	0	0	0	0	1071		
5	F2	1800	1500	1650	1250	0	0	0	0	1749000		
6	F3	1740	1380	1615	1200	0	0	0	0	1659475		
7	F4	60	120	35	50	0	0	0	0	89525		
8	Omezující podmínky											
9		1	0	0	0	0	0	0	0	535	>=	125
10		0	1	0	0	0	0	0	0	441	>=	15
11		0	0	1	0	0	0	0	0	15	>=	15
12		0	0	0	1	0	0	0	0	80	>=	80
13						1	0	0	0	0	>=	0
14						0	1	0	0	0	>=	0
15						0	0	1	0	346	>=	0
16						0	0	0	1	1327	>=	0
17		1	0	3	4	1	0	0	0	900	=	900
18		4	6	1	0	0	1	0	0	4800	=	4800
19		6	5	0	3	0	0	1	0	6000	=	6000
20		0	10	7	2	0	0	0	1	6000	=	6000

Obrázek 5 Výsledek řešení modelu 1

Na obrázku č.1 je možné vidět v buňkách B2-E2 jsou hodnoty bazických proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, které představují optimální výrobní plán, když funkce F_1 je v maximu. V buňkách F2-I2 jsou hodnoty doplňujících proměnných, které představuji nevyužitou kapacitu strojů S1-S4. Hodnota funkce F_1 (maximální počet kusu) je představená v buňce J4.

Z toho vyplývá, že maximální hodnota účelové funkce F_1 = 1071 ks, odpovídající výrobnímu plánu: produkce typu A – 535 ks, produkce typu B – 441 ks, produkce typu C – 15 ks , produkce typu D – 80 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroje 3 a 4 je 346 a 1327 hodin.

Model 2. Maximalizace účelové funkce F_2 stanovenou vzorcem (2.10) při podmínkách (2.5) a (2.6). Na obrázku 2 je zobrazená forma řešení matematického modelu 2 pomocí tabulkového procesoru Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
2		535	441	15	80	0	0	346	1327			
3		Účelové funkce										
4	F1	1	1	1	1	0	0	0	0	1071		
5	F2	1800	1500	1650	1250	0	0	0	0	1749000		
6	F3	1740	1380	1615	1200	0	0	0	0	1659475		
7	F4	60	120	35	50	0	0	0	0	89525		
8	Omezující podmínky											
9		1	0	0	0	0	0	0	0	535	>=	125
10		0	1	0	0	0	0	0	0	441	>=	15
11		0	0	1	0	0	0	0	0	15	>=	15
12		0	0	0	1	0	0	0	0	80	>=	80
13		0	0	0	0	1	0	0	0	0	>=	0
14		0	0	0	0	0	1	0	0	0	>=	0
15		0	0	0	0	0	0	1	0	346	>=	0
16		0	0	0	0	0	0	0	1	1327	>=	0
17		1	0	3	4	1	0	0	0	900	=	900
18		4	6	1	0	0	1	0	0	4800	=	4800
19		6	5	0	3	0	0	1	0	6000	=	6000
20		0	10	7	2	0	0	0	1	6000	=	6000

Obrázek 6 Výsledek řešení modelu 2

Na obrázku č.2 je možné vidět, že v buňkách B2-E2 jsou hodnoty základních proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, které představují optimální výrobní plán když funkce F2 je v maximu. V buňkách F2-I2 jsou hodnoty doplňujících proměnných, které představuji nevyužitou kapacitu strojů S1-S4. Hodnota funkce F2 (maximální hodnota produkce) je představená v buňce J5.

Z toho vyplývá, že maximální hodnota účelové funkce $F_2 =$ 1749000 Kč, odpovídající výrobnímu plánu: produkce typu A – 535 ks, produkce typu B – 441 ks, produkce typu C – 15 ks , produkce typu D – 80 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroje 3 a 4 je 346 a 1327 hodin.

Model 3. Minimalizace účelové funkce F_3 stanovenou vzorcem (2.11) při podmínkách (2.5) a (2.6). Na obrázku 3 je zobrazená forma řešení matematického modelu 3 pomocí tabulkového procesoru Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
2		125	15	15	80	410	4195	4935	5585			
3	Účelové funkce											
4	F1	1	1	1	1	0	0	0	0	235		
5	F2	1800	1500	1650	1250	0	0	0	0	372250		
6	F3	1740	1380	1615	1200	0	0	0	0	358425		
7	F4	60	120	35	50	0	0	0	0	13825		
8	Omezující podmínky											
9		1	0	0	0	0	0	0	0	125	>=	125
10		0	1	0	0	0	0	0	0	15	>=	15
11		0	0	1	0	0	0	0	0	15	>=	15
12		0	0	0	1	0	0	0	0	80	>=	80
13		0	0	0	0	1	0	0	0	410	>=	0
14		0	0	0	0	0	1	0	0	4195	>=	0
15		0	0	0	0	0	0	1	0	4935	>=	0
16		0	0	0	0	0	0	0	1	5585	>=	0
17		1	0	3	4	1	0	0	0	900	=	900
18		4	6	1	0	0	1	0	0	4800	=	4800
19		6	5	0	3	0	0	1	0	6000	=	6000
20		0	10	7	2	0	0	0	1	6000	=	6000

Obrázek 7 Výsledek řešení modelu 3

Na obrázku 3 je možné vidět, že v buňkách B2-E2 jsou hodnoty základních proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, které představují optimální výrobní plán když funkce F_3 je v minimu. V buňkách F2-I2 jsou hodnoty doplňujících proměnných, které představuji nevyužitou kapacitu strojů S1-S4. Hodnota funkce F_3 (minimální náklady na výrobu) je představená v buňce J6.

Z toho vyplývá, že minimální hodnota účelové funkce F_3 = 358425 Kč, odpovídající výrobnímu plánu: produkce typu A – 125 ks, produkce typu B – 15 ks, produkce typu C – 15 ks , produkce typu D – 80 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroj 1 – 410 hodin, pro stroj 2 – 4195 hodin, pro stroj 3 – 4935 hodin, pro stroj 4 – 5585 hodin.

Daný model popisuje minimální počet produkce, který podnik musí vyrábět podle poptávky dodavatelů.

Model 4. Maximalizace účelové funkce F_4 stanovenou vzorcem (2.12) při podmínkách (2.5) a (2.6). Na obrázku 4 je zobrazená forma řešení matematického modelu 4 pomocí tabulkového procesoru Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
2		350	564	15	126	0	0	701	0			
3	Účelové funkce											
4	F1	1	1	1	1	0	0	0	0	1055		
5	F2	1800	1500	1650	1250	0	0	0	0	1658756		
6	F3	1740	1380	1615	1200	0	0	0	0	1563215		
7	F4	60	120	35	50	0	0	0	0	95541		
8	Omezující podmínky											
9		1	0	0	0	0	0	0	0	350	>=	125
10		0	1	0	0	0	0	0	0	564	>=	15
11		0	0	1	0	0	0	0	0	15	>=	15
12		0	0	0	1	0	0	0	0	126	>=	80
13		0	0	0	0	1	0	0	0	0	>=	0
14		0	0	0	0	0	1	0	0	0	>=	0
15		0	0	0	0	0	0	1	0	701	>=	0
16		0	0	0	0	0	0	0	1	0	>=	0
17		1	0	3	4	1	0	0	0	900	=	900
18		4	6	1	0	0	1	0	0	4800	=	4800
19		6	5	0	3	0	0	1	0	6000	=	6000
20		0	10	7	2	0	0	0	1	6000	=	6000

Obrázek 8 Výsledek řešení modelu 4

Na obrázku 4 je možné vidět, že v buňkách B2-E2 jsou hodnoty bazických proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 který predstavují optimální výrobní plán když funkce F_4 je v maximu. V buňkách F2-I2 jsou hodnoty doplňujících proměnných, které představuji nevyužitou kapacitu strojů S1-S4. Hodnota funkce F_4 (maximální zisk) je v buňce J7.

Z toho vyplývá, že maximální hodnota účelové funkce $F_4 =$ 95541 Kč, odpovídající výrobnímu plánu: produkce typu A – 350 ks, produkce typu B – 564 ks, produkce typu C – 15 ks , produkce typu D – 126 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroj 3 je 701 hodin.

3.2 Vícekriteriální lineární programování

Model 5. Metoda agregace účelových funkcí

Použijeme metody agregace účelových funkcí. Proto stanovíme váhy kritéria λ_1= λ_2 = λ_3 = λ_4 = 0,25. Vytvoříme účelovou funkce podle vzorce (1.9):

$$F_5 = 0{,}25\ (F_1 + F_2 - F_3 + F_4).$$

Funkce F_3 je převzata znaménkem mínus, proto, aby minimalizace se změnila na maximum funkce.

$$F_5 = 0{,}25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ 1300x_1 + 1500x_2 + 1350x_3 + 1200x_4$$
$$- (1740x_1 + 1380x_2 + 1615x_3 + 1200x_4) + 60x_1 + 120x_2 + 135x_3$$
$$+ 100x_4) \rightarrow max$$

Po dosazení takových podmínek dostaneme:

$$F_5 = 30{,}25x_1 + 60{,}25x_2 + 17{,}75x_3 + 25{,}75x_4 \rightarrow max \qquad (3.1)$$

Na obrázku 5 je zobrazená forma řešení matematického modelu 5 pomocí tabulkového procesoru Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8			
2		350	564	15	126	0	0	701	0			
3	Účelové funkce											
4	F1	1	1	1	1	0	0	0	0	1055		
5	F2	1800	1500	1650	1250	0	0	0	0	1658756		
6	F3	1740	1380	1615	1200	0	0	0	0	1563215		
7	F4	60	120	35	50	0	0	0	0	95541		
8	F5	30	60	18	26					48098		
9	Omezující podmínky											
10		1	0	0	0	0	0	0	0	350	>=	125
11		0	1	0	0	0	0	0	0	564	>=	15
12		0	0	1	0	0	0	0	0	15	>=	15
13		0	0	0	1	0	0	0	0	126	>=	80
14		0	0	0	0	1	0	0	0	0	>=	0
15		0	0	0	0	0	1	0	0	0	>=	0
16		0	0	0	0	0	0	1	0	701	>=	0
17		0	0	0	0	0	0	0	1	0	>=	0
18		1	0	3	4	1	0	0	0	900	=	900
19		4	6	1	0	0	1	0	0	4800	=	4800
20		6	5	0	3	0	0	1	0	6000	=	6000
21		0	10	7	2	0	0	0	1	6000	=	6000

Obrázek 9 Výsledek řešení modelu 5

Na obrázku 5 je možné vidět, že v buňkách B2-E2 jsou hodnoty bazických proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 který predstavují optimální výrobní plán když funkce F_5 je v maximu.

V buňkách F2-I2 jsou hodnoty doplňujících proměnných, které představuji nevyužitou kapacitu strojů S1-S4. Hodnota funkce F_5 je v buňce J8.

Funkce F_5 nemá žádný ekonomický význam, protože jsem sčítal funkce různých typu (jednotka měření).

Z toho vyplývá, že maximální hodnota účelové funkce F_5 = 48098, odpovídající výrobnímu plánu: produkce typu A – 350 ks, produkce typu B – 564 ks, produkce typu C – 15 ks , produkce typu D – 126 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroj 3 je 701 hodin.

Model 6. Metoda cílového programování

Metoda cílového programování je popsaná v 1.5.3. Pomocí metody cílového programování řešíme náš model. Zaprvé musíme stanovit cílové hodnoty účelových funkcí. Vytvoříme omezující podmínky pro úkol typu (1.7). Pro to k omezujícím podmínkám (2.7) a (2.8) přidáme doplňující omezující podmínky, získaný z funkcí (2.9) – (2.12). Pro každou funkce jednokriteriální optimalizace bude stanovena cílová hodnota.

Z výsledků z modelů 1-4 stanovíme cílovou hodnotu každé funkce:

$$\widetilde{F_1} = 1\,050, \widetilde{F_2} = 1\,700\,000, \widetilde{F_3} = 360\,000, \widetilde{F_4} = 95\,000.$$

Zadáme pro funkce F_1, F_2, F_3, F_4 nedosažení a překročení cílové hodnoty:

u_1, u_2, u_3, u_4 – nedosažení cílové hodnoty funkcí F_1, F_2, F_3, F_4.

v_1, v_2, v_3, v_4 – překročení cílové hodnoty funkcí F_1, F_2, F_3, F_4.

Sestavíme nový systém omezujících podmínek:

$$\begin{cases} x_1 \geq 125, \\ x_2 \geq 15, \\ x_3 \geq 15, \\ x_4 \geq 80, \\ x_j \geq 0, (j = 5, \dots, 8), \\ u_i \geq 0, v_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, 4). \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 900, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_6 = 4800, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_4 + x_7 = 6000, \\ 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_8 = 6000. \end{cases} \tag{3.3}$$

Sestavíme účelovou funkci G podle vzorce (1.8):

$$G = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + u_4 + v_4 = min. \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + u_1 - v_1 = 1050, \\ 1800x_1 + 1500x_2 + 1650x_3 + 1250x_4 + u_2 - v_2 = 1\,700\,000, \\ 1740x_1 + 1380x_2 + 1615x_3 + 1200x_4 + u_3 - v_3 = 360\,000, \\ 60x_1 + 120x_2 + 35x_3 + 50x_4 + u_4 - v_4 = 95\,000. \end{cases}$$

Na obrázku 6 je zobrazená forma řešení matematického modelu 6 pomocí tabulkového procesoru Excel.

Na obrázku 6 je možné vidět, že v buňkách B2-E2 jsou hodnoty bazických proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 který predstavují optimální výrobní plán když funkce F_6 je v minimu. V buňkách F2-I2 jsou hodnoty doplňujících proměnných, které představuji nevyužitou kapacitu strojů S1-S4. V buňkách J2-Q2 jsou hodnoty nedosažení cílové hodnoty u_1, u_2, u_3, u_4 a překročení cílové hodnoty v_1, v_2, v_3, v_4. Hodnota funkce F_6 je v buňce R8.

Z toho vyplývá, že minimální hodnota účelové funkce F_6 = 1245000, odpovídající výrobnímu plánu: produkce typu A – 352 ks, produkce typu B – 562 ks, produkce typu C – 22 ks , produkce typu D – 114 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroje 1 a 3 je 25 hodin a 701 hodin.

3.3 Implementace výsledků

Provedu analýzu výsledků účelových funkcí, který jsem dostal vypracováním modelů 1 – 6. V tabulce 3 jsou zobrazeny hodnoty účelových funkcí F_1, F_2, F_3, F_4:

Model	F_1 [ks]	F_2 [Kč]	F_3 [Kč]	F_4 [Kč]
1	1071=max F_1	1749000=max F_2	1659475= max F_3	89525
2	1071=max F_1	1749000=max F_2	1659475= max F_3	89525
3	235=min F_1	372250=min F_2	358425= min F_3	13825= min F_4
4	1055	1658756	1563215	95541=max F_4
5	1055	1658756	1563215	95541=max F_4
6	1050	1655404	1560404	95000

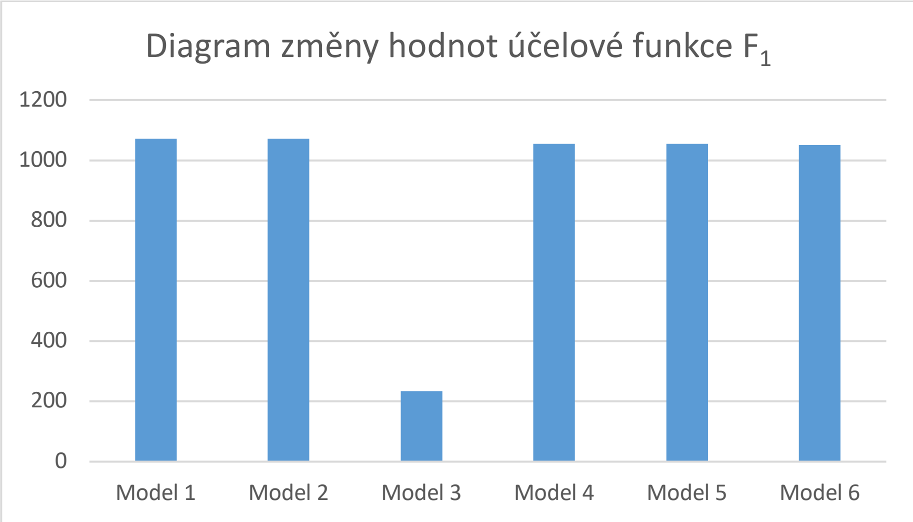
Tabulka 3 Hodnoty účelových funkcí po optimalizace

Jak je možné vidět, všechny funkce dosahuji své minimální hodnoty v modelu číslo 3. Maximální hodnota funkci F_1, F_2, F_3 je představená v modelu číslo 1. Maximální hodnota F_4 je představená v modelech č. 4 a 5. Hodnoty získané v modelu číslo 6 nejsou optimální pro všechny funkce, i když přinášejí optimální hodnotu všech čtyř funkcí současně.

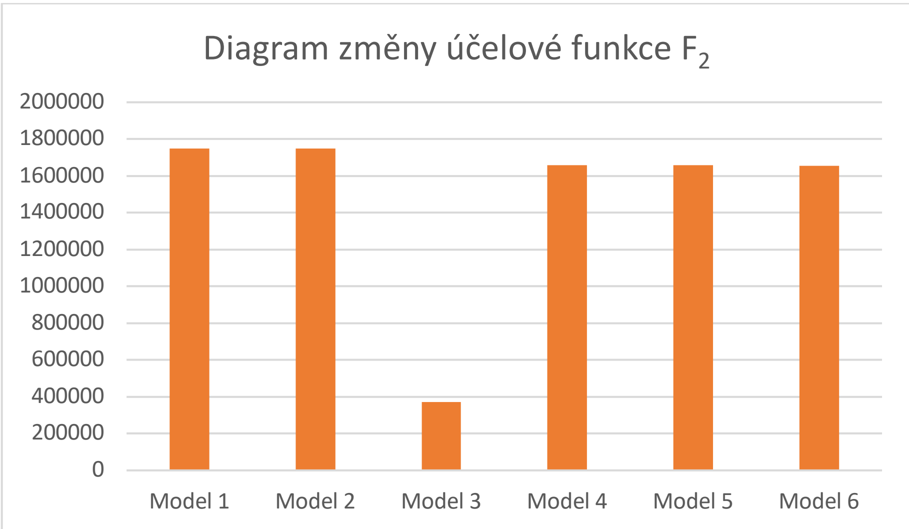
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	u1	v1	u2	v2	u3	v3	u4	v4			
2		352	562	22	114	25	0	737	0	0	0	44596	0	0	1200404	0	0			
3	Účelové funkce																			
4	F1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1050	=	1050
5	F2	1800	1500	1650	1250	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1700000	=	1700000
6	F3	1740	1380	1615	1200	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	360000	=	360000
7	F4	60	120	35	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	95000	=	95000
8	G									1	1	1	1	1	1	1	1	1245000		
9	Omezující podmínky																			
10		1	0	0	0	0	0	0	0									352	>=	125
11		0	1	0	0	0	0	0	0									562	>=	15
12		0	0	1	0	0	0	0	0									22	>=	15
13		0	0	0	1	0	0	0	0									114	>=	80
14		0	0	0	0	1	0	0	0									25	>=	0
15		0	0	0	0	0	1	0	0									0	>=	0
16		0	0	0	0	0	0	1	0									737	>=	0
17		0	0	0	0	0	0	0	1									0	>=	0
18		1	0	3	4	1	0	0	0									900	=	900
19		4	6	1	0	0	1	0	0									4800	=	4800
20		6	5	0	3	0	0	1	0									6000	=	6000
21		0	10	7	2	0	0	0	1									6000	=	6000
22										1	0	0	0	0	0	0	0	0	>=	0
23										0	1	0	0	0	0	0	0	0	>=	0
24										0	0	1	0	0	0	0	0	44596	>=	0
25										0	0	0	1	0	0	0	0	0	>=	0
26										0	0	0	0	1	0	0	0	0	>=	0
27										0	0	0	0	0	1	0	0	1200404	>=	0
28										0	0	0	0	0	0	1	0	0	>=	0
29										0	0	0	0	0	0	0	1	0	>=	0

Obrázek 10 Minimalizace funkce G

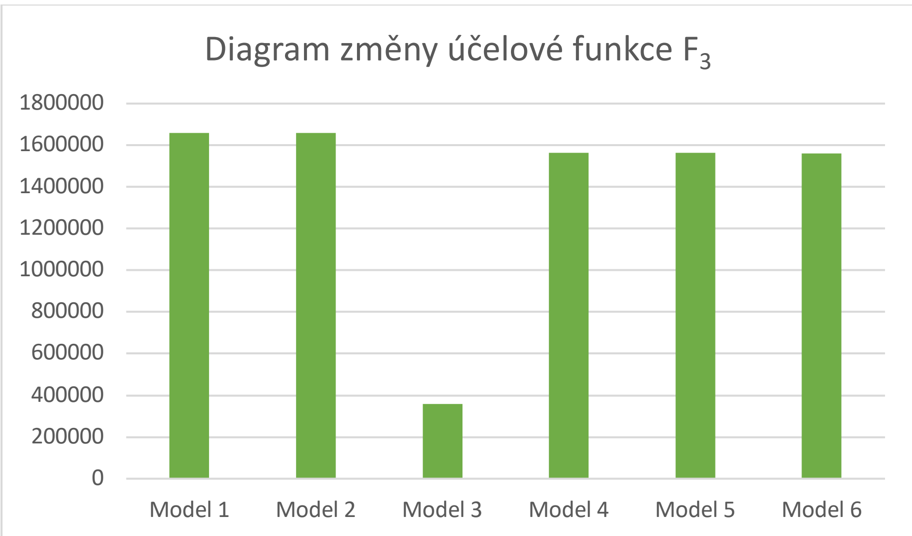
Sestavíme dynamiku změn hodnot účelových funkcí F_1, F_2, F_3, F_4 z hodnot z tabulky 3. Diagramy změny hodnot účelových funkcí je možné vidět na obrazcích 7 – 10.



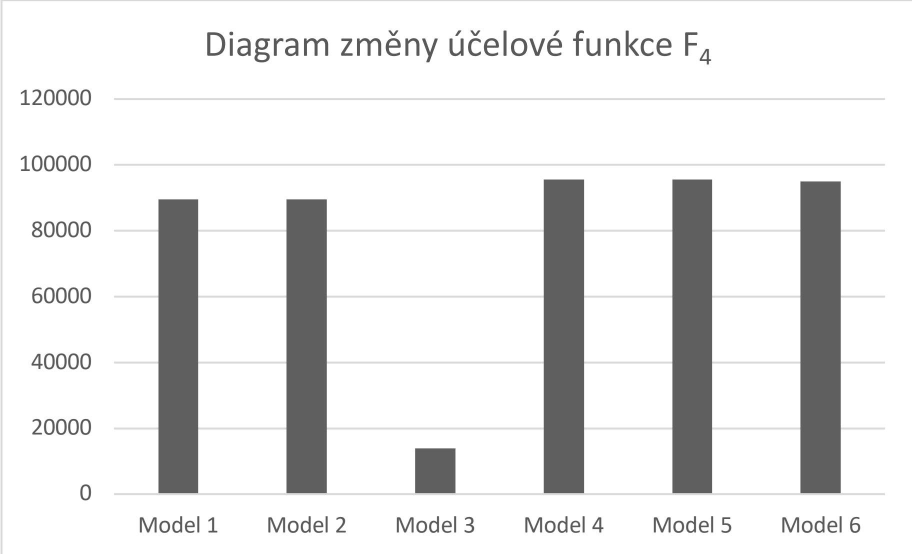
Obrázek 11 Účelová funkce F_1



Obrázek 12 Účelová funkce F_2



Obrázek 13 Účelová funkce F_3



Obrázek 14 Účelová funkce F_4

Jak je možné vidět, v modelu 3 je získáno nejmenší počet výrobku, počet produkce, nákladů a zisk. Dáne řešení nemůže být vybráno jako kompromisní řešení.

V modelech 1 a 2 je maximální hodnota počtu výrobku, počtu produkce a nákladů. Zisk je maximální v modelech 4 a 5.

Hodnoty získané v modelu číslo 6 nejsou optimální pro všechny funkce, i když přinášejí optimální hodnoty všech ekonomických ukazatelů.

Tímto způsobem, doporučoval bych vedení podniku využívat model 5 jak kompromisní řešení.

V tabulce 4 jsou zobrazený hodnoty bazických proměnných $x_1 - x_4$:

Model	x_1	x_2	x_3	x_4
1	535	441	15	80
2	535	441	15	80
3	125	15	15	80
4	350	564	15	126
5	350	564	15	126
6	352	562	22	114

Tabulka 4 Hodnoty bazických proměnných po optimalizace

Z toho vyplývá, že optimální výrobní plán pro model 5: produkce typu A – 350 ks, produkce typu B – 564 ks, produkce typu C – 15 ks , produkce typu D – 126 ks. Při těchto hodnotách nevyužitá kapacita pro stroj 3 je 701 hodin.

V tabulce 5 jsou zobrazený hodnoty doplňujících proměnných $x_5 - x_8$:

Model	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0	0	346	1327
2	0	0	346	1327
3	410	4195	4935	5585
4	0	0	701	0
5	0	0	701	0
6	24	0	737	0

Tabulka 5 Hodnoty doplňujících proměnných po optimalizace

V návrhové části práce bylo představeno 6 modelů (4 jednokriterialní a 2 vícekriteriální) dle kterých byli vypracované výpočty zadáni a úloh, stanovených podnikem. Podle výsledků výpočtů nelze jednoznačně určit, který z modelů je nejpřijatelnější. Každý z modelů může být použit v konkrétní výrobní situaci, která je dána poptávkou po produktech A, B, C, D.

4. Závěr

Závěrem své bakalářské práce bych rad zhodnotil jednotlivé kapitoly a přinos modelu vícekriteriálního programování pro společnost HARP Ukrajina.

V první, teoretické časti byla rozebráná problematika úloh lineárního programování, plánováni výroby, které hraje velice důležitou roli, etapy sestaveni matematického modelu a za pomoci jakého softwaru se řeší úlohy lineárního programovaní. Také byli popsané různé metody řešeni úloh vícekriteriálního lineárního programováni.

V analytické časti byla představena společnost HARP a rozebrána problematika úlohy, kterou jsem následně řešil. Ve spolupráci s plánovacím oddělením společnosti byli stanoveny určitá kritéria, které byli následně ohodnoceny a v závěru byly vybrány varianty optimálního výrobního plánu.

Výsledné řešeni, materiály a model MS Excel byli navrženy společností HARP Ukrajina.

V návrhu je několik moznosti využití metod vícekritériálního lineárního programování pro optimalizací výrobního procesu v podniku a věřím, že to bude mít přinos pro budoucí rozhodování ze strany managementu podniku.

Domnívám se, že moje bakalářská práce splnila svůj účel. Mé návrhy byli v podniku předloženy a vesměs byly akceptovány. Do budoucna by bylo vhodné se zaměřit se na problematiku nevyužitých výrobních kapacit.

5. Seznam použité literatury

[1] JABLONSKÝ, Josef. Programy pro matematické modelování. Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 9788024518107

[2] LINDA, Bohdan a Josef VOLEK. Lineární programování. Vyd. 3. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2009. ISBN 9788073952075.

[3] KOŽÍŠEK, Jan a Barbora STIEBEROVÁ. Statistická a rozhodovací analýza. 2. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2014. ISBN 9788001055090.

[4] KUBIŠOVÁ, Andrea. Operační výzkum. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2014. ISBN 978-80-87035-83-2.

[5] CE-ITI Homepage [online]. Copyright ©. Dostupné z: https://iti.mff.cuni.cz/series/2006/311.pdf [cit. 23.05.2019]

[6] KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. Metody operačního výzkumu. Brno: Vysoké učení technické, 1996. ISBN 8021408170.

[7] PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav ŽIŽKA. Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování. V Plzni: Západočeská univerzita, 2005. ISBN 80-7043-435-x.

[8] HARP Ukrajina [online]. Dostupné z: http://www.harp.ua

6. Seznam obrázků

7. Seznam tabulek